2 **cognome e nome:** ....

Appello di Fisica Matematica - seconda parte - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 13 luglio 2012

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui sono svolti gli esercizi relativi a 2 e 3, anch'esso con cognome e nome e con i numeri 2 e 3 messi bene in evidenza.

1• Dopo avere scritto con cura la Definizione di stabilità (semplice) di Lyapunov per un equilibrio per $\dot{x} = X(x)$, enunciare e dimostrare il Teorema *topologico* della funzione di Lyapunov W (cioè, si richiede solo la *continuità* di W).

2• In un piano verticale OXY, y verticale ascendente, $\mathbf{g}{=}-g\,\hat{y}$, $g > 0$, un guida semicircolare di massa M e raggio R ha gli estremi A e B vincolati a scorrere senza attrito lungo X. Un punto P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida ed è collegato ad un'estremità di una molla, di costante elastica $h > 0$, la cui altra estremità è nel punto più basso della guida, H, che ha sempre ordinata $y_H = -R$.
Si scelgano come parametri Lagrangiani l'ascissa x del centro C della guida e l'angolo orientato ϑ dalla semiretta positiva delle ascisse X al vettore CP.

–Scrivere la Lagrangiana $L(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta})$ del sistema ed individuare due integrali primi.

–Si elabori la riduzione alla Routh, ottenendo una nuova Lagrangiana $\mathcal{L}(\vartheta, \dot{\vartheta})$, associata a quel valore c (quanto vale?) dell'integrale di ciclicità per L compatibile con l'atto di moto $(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) = (0, 0, 0, 0)$.

–Notando infine che $\mathcal{L}(\vartheta, \dot{\vartheta})$ è del tipo "energia cinetica - energia potenziale", verificare che $\vartheta = \pi/2$ è equilibrio stabile per il sistema ridotto e determinarne la pulsazione ω di piccola oscillazione.

3 **cognome e nome:** ....

Appello di Fisica Matematica - terza parte - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 13 luglio 2012

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui sono svolti gli esercizi relativi a 2 e 3, anch'esso con cognome e nome e con i numeri 2 e 3 messi bene in evidenza.

1• Cos'è una trasformazione canonica di $\mathbb{R}^{2N}$ in $\mathbb{R}^{2N}$?

2• Scrivere la definizione di

–Parentesi di Lie $[\ ,\ ]$ di campi vettoriali in X e Y in $\mathbb{R}^m$,

–Parentesi di Poisson $\{\ ,\ \}$ di funzioni reali in $\mathbb{R}^{2N}$, $x = (q, p)$,

–Esprimere la derivata di Lie di una funzione $f : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ rispetto ad un campo vettoriale Hamiltoniano $X_H = \mathbb{E}\nabla H$ mediante le parentesi di Poisson.

–Mostrare che la seguente mappa, dalle funzioni ai campi vettoriali,

$$(C^\infty(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}), \{\ ,\ \}) \longrightarrow (C^\infty(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^{2N}), [\ ,\ ])$$

$$f \longmapsto \mathbb{E}\nabla f$$

è un (anti-) morfismo d'algebra.

3• I due seguenti campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$ commutano?

$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := (x_1, 0, x_3^3)$$

$$Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad Y(x) := (0, x_2^2, 0)$$

Soluzione (dell'esercizio del 2).

$OP = (x + R\cos\vartheta, -R\sin\vartheta)$, $\quad V = \dot{OP} = (\dot x - R\dot\vartheta\sin\vartheta, -R\dot\vartheta\cos\vartheta)$,

$L(x, \dot x, \vartheta, \dot\vartheta) = T - U = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}m(\dot x^2 + R^2\dot\vartheta^2 - 2R\dot x\dot\vartheta\sin\vartheta) + mgR\sin\vartheta - \frac{1}{2}h\underbrace{2R^2(1-\sin\vartheta)}_{|HP|^2}$

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad\Rightarrow\quad$ integrale di Jacobi, l'energia $E(x, \dot x, \vartheta, \dot\vartheta) = T + U$:

$E = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}m(\dot x^2 + R^2\dot\vartheta^2 - 2R\dot x\dot\vartheta\sin\vartheta) - mgR\sin\vartheta + \frac{1}{2}h2R^2(1-\sin\vartheta)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad\Rightarrow\quad f = \frac{\partial L}{\partial \dot x}$ è int. primo: $\qquad f = M\dot x + m(\dot x - R\dot\vartheta\sin\vartheta)$

$$c = f(x, \dot x, \vartheta, \dot\vartheta)|_{(0,0,0,0)} = 0$$

Si ricava:

$$\dot x = S(\vartheta, \dot\vartheta) = \frac{mR\dot\vartheta\sin\vartheta}{M+m}$$

Tenendo conto che $c = 0$, la Lagrangiana ridotta è

$$\mathcal{L}(\vartheta, \dot\vartheta) = L(\dot x, \vartheta, \dot\vartheta)|_{\dot x = S(\vartheta,\dot\vartheta)} = \underbrace{\frac{1}{2}mR^2\left(1 - \frac{m\sin^2\vartheta}{M+m}\right)\dot\vartheta^2}_{\mathcal{T}(\vartheta,\dot\vartheta)} + \underbrace{mgR\sin\vartheta - \frac{1}{2}h2R^2(1-\sin\vartheta)}_{-\mathcal{U}(\vartheta)}$$

$$0 = \mathcal{U}' = -(mgR + hR^2)\cos\vartheta \qquad\Rightarrow\qquad \vartheta = \pi/2$$

$$\mathcal{U}''|_{\vartheta=\pi/2} = (mgR + hR^2) > 0 : \quad \textit{stabile}$$

$$\mathcal{T}^0(\dot\vartheta) = \mathcal{T}(\pi/2, \dot\vartheta) = \frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}R^2\dot\vartheta^2$$

$$0 = mgR + hR^2 - \omega^2\frac{mM}{M+m}R^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(mg+hR)(M+m)}{mMR}}$$